151 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Cadre : On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

I Dimension d'un espace vectoriel

1) Familles libres, familles génératrices, bases

Définition 1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$.

Exemple 2. *Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\}$ est génératrice.*

Définition 3. Un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Sinon, il est de dimension infinie.

Exemple 4. *$\mathbb{K}^n$ est de dimension finie. $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.*

Définition 5. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est dite libre si toute combinaison linéaire vérifiant $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ implique que, pour tout $i \in I$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, la famille est dite liée.

Exemple 6. *(i) Dans $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\13\\5\end{pmatrix} \right\}$ est liée.*

(ii) Dans $\mathbb{R}^3$, $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} \right\}$ est libre.

Proposition 7. *Une famille de E est libre si, et seulement si, aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres.*

Théorème 8. *Si E est engendré par un nombre fini n de vecteurs, toute famille libre de E a au plus n éléments.*

Définition 9. Une famille à la fois libre et génératrice est appelée base.

Exemple 10. *(i) La famille $(e_i)_{i\in I}$ (où $e_i = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant j \leqslant n}$) est une base de $\mathbb{K}^n$ (base canonique).*

(ii) La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

(iii) La famille $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Proposition 11. *Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.*

2) Théorie de la dimension

Théorème 12 (de la base incomplète)**.** *Soient E de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E finie, et $\mathcal{L}$ une famille libre dans E. Alors il existe une famille $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une base de E.*

Corollaire 13. *(i) Tout espace vectoriel de dimension finie a une base.*

(ii) Toute partie libre peut être complétée en une base.

(iii) De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Lemme 14. *Soient E de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E finie, et $\mathcal{L}$ une famille libre dans E. Alors $\mathrm{Card}\,\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Card}\,\mathcal{G}$.*

Théorème 15. *En dimension finie, les bases ont même cardinal.*

Définition 16. Cet entier, noté $\dim_{\mathbb{K}} E$, s'appelle dimension de E.

Proposition 17. *Supposons E de dimension finie n, alors :*

(i) Toute famille libre ou génératrice de n vecteurs est une base de E.

(ii) Toute famille de plus de n éléments est liée.

(iii) Toute famille de moins de n éléments ne peut être génératrice.

Théorème 18. *Deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.*

Corollaire 19. *Si $\dim_{\mathbb{K}} E = n$, alors $E \cong \mathbb{K}^n$.*

3) Sous-espaces et somme de sous-espaces

Soient E de dimension finie et E_1, E_2 sous-espaces vectoriels de E.

Théorème 20. *(i)* $\dim_{\mathbb{K}} E_1 \leqslant \dim_{\mathbb{K}} E < +\infty$

(ii) $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}} E \Leftrightarrow E_1 = E$

(iii) $\dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 - \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2)$

Théorème 21. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $E = E_1 \oplus E_2$

(ii) $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2$ *et* $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

(iii) $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2$ *et* $E_1 + E_2 = E$

(iv) $E = E_1 + E_2$ *et* $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

II Théorie du rang

1) Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

Définition 22. On dit que f est de rang fini si $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. Dans ce cas, l'entier $\dim \operatorname{Im} f$ est appelé rang de f et est noté $\operatorname{rg} f$.

Exemple 23. $(x,y,z) \mapsto (x+y-z, 2x+y+z, 3x+2y)$ *est de rang 2.*

Théorème 24 (du rang)**.** $\dim_{\mathbb{K}} E = \operatorname{rg} f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f$

Exemple 25. *En appelant f la fonction définie à l'exemple 23, on a* $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$*, donc* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = 1$*, et on a bien* $3 = 2+1$

Corollaire 26. *Supposons* $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F < +\infty$*, alors :*

$$f \text{ est bijective } \Leftrightarrow f \text{ est injective } \Leftrightarrow f \text{ est surjective}$$

Contre-exemple 27. *En dimension infinie, la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ est surjective, mais non bijective.*

2) Rang d'une matrice

Définition 28. On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension de l'espace engendré par ces vecteurs. On appelle rang d'une matrice A le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. On le note $\operatorname{rg} A$.

Proposition 29. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible* $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n$.

Exemple 30. *La matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang 3, donc inversible.*

Définition 31. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle mineur d'ordre r le déterminant d'une sous-matrice carrée de taille r.

Théorème 32. *Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ est la taille de son plus grand mineur non nul.*

Corollaire 33. *Le rang de toute matrice est égal au rang de sa transposée.*

Corollaire 34. *Le rang d'une matrice est également le rang de la famille de ses vecteurs lignes.*

Remarque 35. *Si* $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} A \leqslant \min(p,q)$.

Définition 36. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. A et B sont équivalentes s'il existe $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_q(\mathbb{K})$ telles que $B = PAQ$.

Exemple 37. *Les matrices* $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ *sont équivalentes.*

Théorème 38. *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Si $r = \operatorname{rg} A \geqslant 1$, A est équivalente à la matrice* $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, où I_r est la matrice identité de taille r.*

Corollaire 39. *Deux matrices de même taille sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.*

Corollaire 40. *On ne change pas le rang d'une matrice en multipliant une colone par un scalaire non nul, ou en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes (même chose avec les lignes).*

III Applications

Supposons E de dimension finie n.

1) Dualité

Définition 41. On note $E^\star = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E, appelé espace dual de E.

Proposition 42. *Soit* $f \in E^\star \setminus \{0\}$. *Alors* $\operatorname{rg} f = 1$ *et* $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} f = n-1$.

Proposition 43. $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E^\star$ *et* $E \cong E^\star$.

Théorème 44. *La base duale de la base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est donnée par $(f_1, \dots, f_n)$, où $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$.*

Proposition 45. *On a* $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E^{\star\star}$*. De plus, E et $E^{\star\star}$ sont canoniquement isomorphes.*

Définition 46. Pour $A \subseteq E$ et $B \subseteq E^\star$, on note :

(i) $A^\perp = \{\varphi \in E^\star \,|\, \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de A dans $E^\star$.

(ii) $B^\circ = \{x \in E \,|\, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$ l'orthogonal de B dans E.

Proposition 47. *(i) Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.*

(ii) Si $B_1 \subset B_2 \subset E^\star$, $B_2^\circ \subset B_1^\circ$.

(iii) Si $A \subset E$, $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

(iv) Si $B \subset E^\star$, $B^\circ = (\operatorname{Vect} B)^\circ$.

Proposition 48. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $F^{\perp\circ} = F$ et $\dim_{\mathbb{K}} F + \dim_{\mathbb{K}} F^{\perp} = \dim_{\mathbb{K}} E$.*

Proposition 49. *Si G un sous-espace vectoriel de $E^{\star}$. Alors $G^{\circ\perp} = G$ et $\dim_{\mathbb{K}} G + \dim_{\mathbb{K}} G^{\circ} = \dim_{\mathbb{K}} E^{\star}$.*

Définition 50. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. L'application ${}^{t}u : F^{\star} \to E^{\star}$ définie par ${}^{t}u(f) = f \circ u$ est appelée transposée de u.

Proposition 51. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si, et seulement si, $F^{\perp}$ est stable par ${}^{t}u$.*

2) Réduction de Jordan pour les nilpotents

Proposition 52. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\pi_u = \prod_{i=1}^{\rho}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$, alors :*

- *(i)* $E = \bigoplus_{k=1}^{\rho} N_k$, $\dim_{\mathbb{K}} N_k = \alpha_k$, $N_k = Ker(u - \lambda_k Id_E)^{\beta_k}$
- *(ii)* $(u - Id_E)|_{N_k}$ *est nilpotent d'indice* β_k.
- *(iii)* N_k *est stable par* u *et* λ_k *est la seule valeur propre de* $u|_{N_k}$.

Lemme 53. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Pour tout $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $\mathcal{B}_{u,x} = (u^k(x))_{1 \leqslant k \leqslant q-1}$ est une famille libre de E et l'espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est u-stable.*

Théorème 54. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $q \geqslant 1$. Alors il existe une base $\mathcal{B} = B_1 \cup \ldots \cup B_r$ de E telle que chaque s.e.v. $E_i = \mathrm{Vect}\, \mathcal{B}_i$ soit stable par u et que la matrice de $u|_{E_i}$ soit :*

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{q_i}(\mathbb{K}), \quad \text{avec } q_i = \dim_{\mathbb{K}} E_i$$

Théorème 55. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $\chi_u = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $\Pi_u = \prod_{i=1}^{\rho}(X - \lambda_i)^{\beta_i}$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u soit de la forme $A = \mathrm{Diag}(J_1, \ldots, J_\rho)$ avec pour tout $k \in [\![1, \rho]\!]$:*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon_{k,2} & \lambda_k & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k - 1} & \lambda_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K}), \quad \text{où } \varepsilon_{k,i} \in \{0, 1\}$$

3) Réduction des endomorphismes normaux

Lemme 56. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors F et $F^{\perp}$ sont stables par u et $u^{\star}$.*

Lemme 57. *Supposons que $n = 2$. Alors :*

- *(i) Si u a une valeur propre réelle, u est diagonalisable dans une base orthonormée.*
- *(ii) Si u n'a pas de valeur propre réelle, la matrice de u dans une base orthonormée est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.*

Théorème 58. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $n = r + 2s$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\tau_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour $k \in [\![1, s]\!]$.

Développements

- Réduction de Jordan (par la dualité) (53,54,55) [Rom20]
- Réduction des endomorphismes normaux (56,57,58) [Gou94]

Références

[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e édition
[Gri11] J. Grifone. *Algèbre Linéaire.* Cépaduès, 4e édition
[FGN13a] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Algèbre 1.* Cassini
[Rom20] J.-E. Rombaldi. *Algèbre et Géométrie.* DeBoeck